TD$_{13}$ – Variables aléatoires discrètes

Exercice 1 ★

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

1. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge et que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X = n) = u_n$. X admet-elle une espérance ? Une variance ? Mêmes questions pour la variable aléatoire $\sqrt{X}$.

Exercice 2 ★

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $(\mathbb{P}(X = n))_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique.

Montrer que X suit une loi géométrique.

Exercice 3 ★

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{4}{n}\mathbb{P}(X = n-1).$$

Trouver la loi de X et son espérance.

Exercice 4 ★★

Une urne contient n, $n \geqslant 3$, boules indiscernables au toucher, deux sont blanches et les autres sont noires. On tire une à une, et sans remise, les n boules de l'urne. X est la variable aléatoire égale au rang de la première boule blanche tirée. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 5 ★★

On considère un point M se déplaçant sur un axe d'origine O, en partant de O et par sauts d'une unité vers la droite avec la probabilité p et vers la gauche avec la probabilité q (avec $p \in]0, 1[$ et $p + q = 1$), les sauts étant supposés indépendants. Soit X_n la variable aléatoire réelle égale à l'abscisse du point à l'issue du n-ième déplacement.

Préciser la loi de X_n, son expérience, sa variance.

Exercice 6 Moments exponentiels ★★

1. Soit $\alpha > 0$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \geqslant K$, $x^p \leqslant \mathrm{e}^{\alpha x}$.
2. Soit X une variable aléatoire réelle. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathrm{e}^{\alpha|X|}$ admet une espérance. Montrer que X admet alors des moments à tout ordre.

Exercice 7 ★★

N urnes comportent chacune des jetons numérotés de 1 à n. On tire au hasard un numéro dans chaque urne, et on appelle X le plus grand des numéros tirés.

1. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
2. Trouver la loi de X.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$. Quelle est la limite de $\dfrac{\mathbb{E}(X)}{n}$ quand n tend vers $+\infty$? En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Quelle est la limite de $\mathbb{E}(X)$ lorsque N tend vers $+\infty$? Commenter.

Exercice 8 ★★

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X>k) - n\mathbb{P}(X>n)$.
2. En déduire que si X admet une espérance, alors $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>k)$.
3. Montrer de même que, si X admet une variance, alors $\mathbb{E}(X^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)\mathbb{P}(X>k)$.
4. On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On effectue à partir de cette urne, n tirages successifs indépendants d'une boule, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu. Calculer l'espérance de X. Préciser la loi de X. Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(X)$ lorsque N tend vers l'infini.

Exercice 9 ★★

Partie I — Préliminaires.

Soient $(a,b) \in]0,1[^2$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$

On pose $A = -M + (a-b)I_2$ et $B = M - I_2$.

1. Vérifier que pour $n \geqslant 1$ on a $A^n = (a-b-1)^{n-1}A$ et $B^n = (a-b-1)^{n-1}B$.
2. Calculer AB et BA.
3. Trouver des constantes k_1 et k_2 telles que $(a-b-1)M = k_1A + k_2B$.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a-b-1)M^n = A + (a-b)^nB$.

Partie II — Probabilités.

La règle de conduite pour la consommation de bonbons de Monsieur M. est la suivante :

— si le n-ième jour il mange du caramel, alors la probabilité qu'il en mange le $(n+1)$-ième jour est $\frac{1}{2}$.

— si le n-ième jour il ne mange pas de caramel, alors la probabilité qu'il en mange le $(n+1)$-ième jour est $\frac{4}{5}$.

On suppose que le jour 0 il n'en mange pas et on note :

$u_n = \mathbb{P}(\text{Mr M. en mange le } n\text{-ième jour})$ $\qquad v_n = \mathbb{P}(\text{Mr M. n'en mange pas le } n\text{-ième jour})$

1. Exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n.
2. Écrire une relation matricielle entre $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$
3. Calculer u_n en fonction de n et en déduire la limite de u_n quand $n \to +\infty$.
4. Pendant une année, en moyenne combien de jours Monsieur M. mange t-il des caramels ?

Exercice 10 ★★★

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que $\mathbb{P}(X \text{ est pair }) \geqslant \mathbb{P}(X \text{ est impair })$.

Exercice 11 ★

On lance simultanément deux dés, jusqu'à ce que les deux dés donnent le même nombre. On note X le nombre de lancers nécessaires. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 12 Absence de mémoire de la loi géométrique ★★

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
Montrer que pour $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\mathbb{P}(X > m+n | X > n) = \mathbb{P}(X > n)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 13 ★★

On dispose de n sacs numérotés de 1 à n. Chaque sac contient $n+1$ jetons. Dans le k-ième sac se trouvent k jetons gagnants, les autres étant perdants. Un joueur choisit au hasard un sac et y pioche un jeton.

1. Quelle est la probabilité que le jeton tiré soit gagnant ?
2. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, sachant que le jeton tiré est gagnant, quelle est la probabilité que le tirage ait eu lieu dans le sac numéro k ?

Exercice 14 ★

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, et soit $Y = \dfrac{1}{X}$. Y admet-elle une espérance ? Si oui la calculer.
2. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{Z+1}\right)$ existe et la calculer.

Exercice 15 ★★

On dispose d'une pièce qui tombe sur « pile »avec probabilité p. On la lance jusqu'à faire « face », et on note X le nombre de lancers nécessaires. Quelle est la probabilité que ce nombre de lancers soit pair ?

Exercice 16 Le concierge alcoolique ★★

Un concierge possède 10 clés sur son trousseau.
Lorsqu'il souhaite ouvrir une porte, il choisit une clé au hasard dans son trousseau jusqu'à obtenir la bonne. Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de clés à essayer par le concierge pour ouvrir une porte.

1. Déterminer la loi de X si le concierge essaie les clés sans remise, puis la loi de X s'il les essaie avec remise.
2. Le concierge essaie les clés sans remise s'il est sobre et avec remise s'il est ivre. Le concierge est ivre un jour sur 3.
   (a) Montrer que X admet une espérance, et la déterminer.
   (b) Aujourd'hui, le concierge a eu besoin de 6 essais pour ouvrir sa porte. Quelle est la probabilité qu'il soit ivre ?
   (c) Même question avec 11 essais.

Exercice 17 ★★★★

On dispose de n urnes $U_1, U_2, \ldots, U_n$, et on dispose 3 boules dans chaque urne.
Dans l'ensemble des $3n$ boules, une seule est bleue, les autres sont rouges.
Sachant que l'on a tiré sans remise deux boules rouges dans l'urne U_1, quelle est la probabilité que la boule bleue se trouve dans l'urne U_2 ?

Exercice 18 ★★★★

Soit X une variable aléatoire discrète admettant des moments jusqu'à l'ordre 4 et telle que
$$\begin{cases} \mathbb{E}(X) = \alpha \\ E\left(X^2\right) = \mathbb{E}(X^4) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $\alpha \in [-1, 1]$.
2. Déterminer la loi de X.

Exercices issus d'oraux

Exercice 19 ★★★

(*Oral 2017*)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{m, \cdots, n\}$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(X) = m + \sum_{k=m}^{n-1} \mathbb{P}(X > k)$
2. On tire avec remise une boule dans une urne qui en contient n numérotées de 1 à n. On note X le rang du tirage où l'on obtient un numéro supérieur ou égal au précédent.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(X > k) = \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 20 ★★★

(*Oral 2017*)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et X la variable aléatoire qui compte le nombre d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $p \in]0, 1]$, pour avoir k succès.

1. Préciser la loi de X si $k = 1$.
2. Déterminer la loi de X dans le cas général.
3. Pour $k = 2$, déterminer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

Exercice 21 ★★★

(*Oral 2019*)

On considère un dé équilibré à 6 faces. On réalise une succession de lancers de sorte que, si le numéro obtenu est strictement supérieur au numéro précédent, on continue, sinon on s'arrête. On note Ω l'univers correspondant à cette expérience aléatoire que l'on ne cherchera pas à expliciter et on note X la variable aléatoire qui compte de nombre de lancers réalisés.

1. Déterminer $X(\Omega)$
2. Calculer $\mathbb{P}(X > n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer la loi de X.
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$, puis $\mathbb{E}(X^2)$.

Exercice 22 ★★★

(*Oral 2019*)

. On considère deux urnes U_0 et U_1 contenant respectivement 3 boules numérotées 0 et 3 boules numérotées 1 . On nomme échange l'action consistant à tirer une boule dans chaque urne et à les changer d'urne.

On note X_n la variable aléatoire indiquant la valeur de la somme des numéros des boules contenues dans l'urne U_1 après le n-ième échange.

1. Déterminer $X_n(\Omega)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 2)$ et $\mathbb{P}(X_{n+1} = 3)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = 0)$, $\mathbb{P}(X_n = 1)$, $\mathbb{P}(X_n = 2)$ et $\mathbb{P}(X_n = 3)$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note U_n, A, L et J définis par
$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1/9 & 0 & 0 \\ 1 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1 \\ 0 & 0 & 1/9 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $LA = \alpha L + \beta J$.
4. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$
5. En déduire une expression de $\mathbb{E}(X_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{E}(X_n)$, pour $n \in \mathbb{N}$.
6. En déduire l'expression de $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

1. (a) Pour tout n, on a $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$.

Et donc pour $N \geqslant 1$, il vient

$$\sum_{k=1}^{N} u_k = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k+1}.$$

Soit encore

$$\sum_{k=1}^{N} u_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \sum_{i=2}^{N+1} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1}.$$

Et donc $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{N} u_k = 1$. Ceci prouve donc que la série de terme général u_k converge et que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k = 1$.

Remarque

Cette décomposition ultra-classique intervient régulièrement aux concours. Parfois elle y est donnée, et parfois non, donc mieux vaut la connaître.

Chgt d'indice

On a posé $i = k+1$.

2. Par définition, X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $k\mathbb{P}(X=k) = \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k+1}$ converge absolument.
Puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs, la convergence est équivalente à la convergence absolue.
Et $\frac{1}{k+1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k}$. Puisque la série de terme général $\frac{1}{k}$ diverge, d'après le critère des équivalents pour les séries à termes positifs,

la série de terme général $k\mathbb{P}(X=k)$ diverge.
Ainsi, X n'admet pas d'espérance.
De plus, X admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2. Mais si c'était le cas, elle admettrait également une espérance.
Ce n'est pas le cas, donc X n'admet pas de moment d'ordre 2, et donc pas de variance.

Rédaction

Le critère des équivalents ne fonctionne que pour les séries à termes positifs, donc si on souhaite l'utiliser, on prendra soin de vérifier (et d'écrire explicitement) la positivité des séries concernées.

Par le théorème de transfert, $\sqrt{X}$ admet une espérance si et seulement si $\sum\limits_{n\geqslant 1} \sqrt{n}\mathbb{P}(X=n)$ converge absolument (ici il s'agit d'une série à termes positifs donc convergence et convergence absolue sont la même chose).
Or, $\sqrt{n}\mathbb{P}(X=n) = \frac{\sqrt{n}}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$.
On reconnaît alors le terme général d'une série de Riemann convergente, et donc par le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum\limits_{n} \sqrt{n}\mathbb{P}(X=n)$ converge, de sorte que $\sqrt{X}$ admet une espérance.
En revanche, $\left(\sqrt{X}\right)^2 = X$ n'admet pas d'espérance, donc $\sqrt{X}$ n'admet pas de moment d'ordre 2, et donc pas de variance.

Corrigé de l'exercice 2

On suppose que $(\mathbb{P}(X=n))_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison q, ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(X=n) = Cq^{n-1}$$

On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=n) \in [0,1]$

Si $C < 0$ ou $q < 0$ alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{P}(X=n) < 0$ ce qui est absurde

Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X = n) = +\infty$ ce qui est absurde

Si $q = 1$ alors la suite $\mathbb{P}(X = n)$ est constante, ce qui est absurde car la série $\sum \mathbb{P}(X = n)$ converge (vers 1).

Finalement $C > 0$ et $q \in [0, 1[$

Déterminons maintenant C, la série de terme général $(Cq^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et on a

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} Cq^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} Cq^{n} \\ &= \frac{C}{1-q} \end{aligned}$$

On a donc $C = 1 - q$ et ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(X = n) = (1-q)q^{n-1}$$

Notons $p = 1 - q$, on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}$$

C'est-à-dire $X \sim \mathcal{G}(p)$

Corrigé de l'exercice 3

On montre par une récurrence facile que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{4^n}{n!}\mathbb{P}(X = 0)$.

Or $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = n)$ converge et vaut 1, ainsi

$$1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = 0) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{n!} = \mathbb{P}(X = 0)\mathrm{e}^4$$

D'où $\mathbb{P}(X = 0) = \mathrm{e}^{-4}$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(X = n) = \frac{4^n \mathrm{e}^{-4}}{n!}$$

X suit donc une loi de Poisson $\mathcal{P}(4)$, d'où $\mathbb{E}(X) = 4$.

Corrigé de l'exercice 4

Pour $k \in [\![1, n]\!]$ notons B_k l'événement « tirer une boule blanche au k-ième tirage »et N_k l'événement « tirer une boule noire au k-ième tirage ».

Alors, si $k \in [\![1, n]\!]$ on a l'égalité d'évenements

$$[X = k] = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k$$

D'après la formule des probabilités composées on a alors

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k) = \mathbb{P}(B_k | N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1})\mathbb{P}(N_k | N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-2}) \cdots \mathbb{P}(N_2 | N_1)\mathbb{P}(N_1)$$

Lors du j-ième tirage, si on n'a tiré que des boules noires au $j - 1$ tirages précédents alors il reste dans l'urne 2 boules blanches et $n-1-j$ boules noires, ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}(B_k|N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_{k-1})\mathbb{P}(N_k|N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_{k-2})\cdots\mathbb{P}(N_2|N_1)\mathbb{P}(N_1)\\
&= \frac{2}{n-k+1}\frac{n-k}{n-k+2}\frac{n-k+1}{n-k+3}\cdots\frac{n-3}{n-1}\frac{n-2}{n}\\
&= 2\frac{\prod_{i=n-k}^{n-2} i}{\prod_{i=n-k+1}^{n} i}\\
&= 2\frac{(n-2)!}{(n-k-1)!}\frac{(n-k)!}{n!}\\
&= \frac{2(n-k)}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

X étant une variable bornée (par 1 et n) elle admet des moments à tout ordre. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{2(n-k)k}{n(n-1)}\\
&= \frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1} k^2\\
&= \frac{2}{n-1}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n(n-1)}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
&= \frac{(n+1)(3n-(2n+1))}{3(n-1)}\\
&= \frac{n+1}{3}
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}(X=k)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{2(n-k)k^2}{n(n-1)}\\
&= \frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1} k^3\\
&= \frac{2}{n-1}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{2}{n(n-1)}\frac{n^2(n+1)^2}{4}\\
&= \frac{2n(n+1)(2n+1)-3n^2(n+1)^2}{6(n-1)}\\
&= \frac{n(n+1)(4n+2-3n(n+1))}{6(n-1)}\\
&= \frac{n(n+1)}{6}
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{V}(X) = \frac{n(n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{9} = \frac{(n+1)(3n-2n-2)}{18} = \frac{(n+1)(n-2)}{18}$$

Corrigé de l'exercice 5

Soit Y_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts vers la droite au bout de n étapes.

Par hypothèse, Y_n suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Puisque l'on a Y_n sauts vers la droite au cours de n étapes on a donc $n - Y_n$ sauts vers la gauche. Ainsi $X_n = -Y_n + (n - Y_n) = 2Y_n - n$

D'où $X_n(\Omega) = \{2k - n, k \in [\![0, n]\!]\}$.

Soit $m \in X_n(\Omega)$ et $k = \dfrac{n+m}{2}$ de sorte que $k \in [\![0, n]\!]$ et $m = 2k - n$. On a alors

$$\mathbb{P}(X_n = m) = \mathbb{P}(Y = k) = \binom{n}{\frac{n+m}{2}} p^{\frac{n+m}{2}} (1-p)^{\frac{n-m}{2}}$$

Comme $X_n = 2Y_n - n$, alors, par linéarité de l'espérance, X_n admet une espérance et $\mathbb{E}(X_n) = 2\mathbb{E}(Y_n) - n = 2np - n$.

De même X_n admet une variance et $\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{V}(2Y_n - n) = 4\mathbb{V}(Y_n) = 4np(1-p)$.

Corrigé de l'exercice 6

1. Par croissance comparées on a $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha \times x}}{x^p} = +\infty$. Ainsi il existe $K > 0$ tel que, $\forall x > K$ $\mathrm{e}^{\alpha\times x} > x^p$, d'où
2. Soit $p \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leqslant |X^p| = |X|^p \mathbb{1}_{|X|<K} + |X|^p \mathbb{1}_{|X|\geqslant K} \leqslant |K|^p + \mathrm{e}^{\alpha|X|}\mathbb{1}_{|X|\geqslant K} \leqslant |K|^p + \mathrm{e}^{\alpha|X|}$$

Or $e^{\alpha|X|}$ admet une espérance, ainsi $|X^p|$ admet une espérance, i.e. X admet un moment d'ordre p.

Corrigé de l'exercice 7

1. Notons T_i le résultat du tirage dans chaque urne, tirages que l'on suppose indépendants.

Notons F_T La fonction de répartition commune des T_i (les T_i ont même loi donc même fonction de répartition), pour $t \in \mathbb{R}$ on a alors

$$\begin{aligned} F_{T_i} &= \mathbb{P}(T_i \leqslant t) \\ &= \frac{\text{Card}\left(\{k \in [\![1, n]\!]\ ,\ k \leqslant t\}\right)}{n} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{\lfloor t \rfloor}{n} & \text{si } t \in [1, n[\\ 1 & \text{si } t \geqslant n \end{cases} \end{aligned}$$

On a ensuite, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \mathbb{P}(X \leqslant t) \\ &= \mathbb{P}(\max_{i\in[\![1,N]\!]} T_i \leqslant t) \\ &= \mathbb{P}(\left(\bigcap \{T_i \leqslant t\}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{N} \mathbb{P}(T_i \leqslant t) \\ &= F_T(t)^N \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{\lfloor t \rfloor^N}{n^N} & \text{si } t \in [1, n[\\ 1 & \text{si } t \geqslant n \end{cases} \end{aligned}$$

2. On a $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et, pour $k \in [\![1,n]\!]$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= F_X(k) - F_X(k-1)\\ &= \frac{k^N}{n^N} - \frac{(k-1)^N}{n^N}\\ &= \frac{k^N-(k-1)^N}{n^N}\end{aligned}$$

3. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} 1 - \mathbb{P}(X<k)\\ &= \sum_{k=1}^{n} 1 - \mathbb{P}(X<k) \qquad \textit{pour } k>n \textit{ on a } \mathbb{P}(X<k)=1\\ &= \sum_{k=1}^{n} 1 - \frac{(k-1)^N}{n^N}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 1 - \frac{k^N}{n^N}\\ &= n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^N}{n^N}\end{aligned}$$

Alors $\dfrac{\mathbb{E}(X)}{n} = 1 - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^N$

On reconnaît une somme de Riemann pour la fonction $x \mapsto x^N$, ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^N = \int_0^1 t^N \,\mathrm{d}t = \frac{1}{N+1}$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(X)}{n} = \frac{N}{N+1}$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}(X) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{Nn}{N+1}$$

4. On a $\mathbb{E}(X) = n - \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j}{n}\right)^N$

Pour $j \in [\![0,n-1]\!]$ on a $-1 < \dfrac{j}{n} < 1$ d'où $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}(X) = n$

Corrigé de l'exercice 8

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} k(\mathbb{P}(X>k-1)-\mathbb{P}(X>k)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X>k-1) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X>k) \\
&= \sum_{k=0} n-1(k+1)\mathbb{P}(X>k) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X>k) \quad \textit{par changement d'indice} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X>k) - n\mathbb{P}(X>n) \quad \textit{par télescopage}
\end{aligned}$$

2. On suppose que X admet une espérance, la série $\sum k\mathbb{P}(X=k)$ converge donc absolument.

   Pour $k \geqslant n$, on a $k\mathbb{P}(X=k) \geqslant n\mathbb{P}(X=k)$, donc, par critère de majoration pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{k\geqslant n} n\mathbb{P}(X=k)$ converge aussi et que

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=k) = n\mathbb{P}(X>n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k)$$

   Or $\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k)$ est le reste d'une série convergente, donc tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

   Par encadrement la suite $(n\mathbb{P}(X>n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   On en déduit que la série de terme général $\mathbb{P}(X>k)$ converge et que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>k)$.

> **Cours**
> Ce résultat est un résultat de cours et peut-être utilisé directement sans démonstration

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a de même

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} k^2(\mathbb{P}(X>k-1)-\mathbb{P}(X>k)) \\
&= \sum_{k=0} n-1(k+1)^2\mathbb{P}(X>k) - \sum_{k=0}^{n} k^2\mathbb{P}(X>k) \quad \text{par changement d'indice} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k^2\mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)\mathbb{P}(X>k) - n^2\mathbb{P}(X>n)
\end{aligned}$$

   On suppose que X admet une variance, la série $\sum k^2\mathbb{P}(X=k)$ converge donc.

   Pour $k \geqslant n$, on a $k^2\mathbb{P}(X=k) \geqslant n^2\mathbb{P}(X=k)$, donc, par critère de majoration pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{k\geqslant n} n^2\mathbb{P}(X=k)$ converge aussi et que

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} n^2\mathbb{P}(X=k) = n^2\mathbb{P}(X>n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k^2\mathbb{P}(X=k)$$

   Or $\sum_{k=n+1}^{+\infty} k^2\mathbb{P}(X=k)$ est le reste d'une série convergente, donc tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

   Par encadrement la suite $(n^2\mathbb{P}(X>n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   On en déduit que la série de terme général $(2k+1)\mathbb{P}(X>k)$ converge et $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)\mathbb{P}(X>k)$.

4. Soit $k \in [\![1, N]\!]$. L'événement $[X \leqslant k]$ est réalisé si chaque boule tirée a un numéro inférieur ou égal à k.

   Comme il y a k boules vérifiant ceci et les boules étant indiscernables, la probabilité de tirer une boule portant un numéro inférieur ou égal à k est $\dfrac{k}{N}$.

   Les tirages étant supposés indépendants, on en déduit que $\mathbb{P}(X \leqslant k) = \left(\dfrac{k}{N}\right)^n$ et donc

$$\mathbb{P}(X > k) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{k}{N}\right)^n & \text{si } k \in [\![1, N]\!] \\ 0 & \text{si } k > N \end{cases}$$

   D'après les questions précédentes on a alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{N-1} 1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n = N - \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

   On a alors

$$\frac{\mathbb{E}(X)}{N} = 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

   On reconnaît là une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto x^n$. Ainsi

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n = \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$$

   On a donc $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \frac{\mathbb{E}(X)}{N} = \frac{n}{n+1}$, d'où $\mathbb{E}(X) \underset{N \to +\infty}{\sim} \dfrac{nN}{n+1}$.

Corrigé de l'exercice 9

Partie I — Préliminaires

1. On va procéder par récurrence.

   Initialisation :

   Pour $n = 1$ on a $A^1 = A = (a-b-1)^0 A$ et $B^1 = B = (a-b-1)^0 B$, l'assertion est bien vérifiée au rang 1.

   Hérédité :

   Soit $n \geqslant 1$, on suppose que

$$A^n = (a-b-1)^{n-1} A \text{ et } B^n = (a-b-1)^{n-1} B$$

   Montrons qu'alors $A^{n+1} = (a-b-1)^n A$ et $B^{n+1} = (a-b-1)^n B$.

   On a

$$A^{n+1} = A^n A = (a-b-1)^{n-1} AA = (a-b-1)^{n-1} A^2$$

   et

$$B^{n+1} = B^n B = (a-b-1)^{n-1} BB = (a-b-1)^{n-1} B^2$$

   Or

$$A^2 = \begin{pmatrix} -b & -b \\ a-1 & a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b & -b \\ a-1 & a-1 \end{pmatrix} = (a-b-1) \begin{pmatrix} -b & -b \\ a-1 & a-1 \end{pmatrix} = (a-b-1)A$$

   et

$$B^2 = \begin{pmatrix} a-1 & b \\ 1-a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-1 & b \\ 1-a & -b \end{pmatrix} = (a-b-1) \begin{pmatrix} a-1 & b \\ 1-a & -b \end{pmatrix} = (a-b-1)B$$

   Ainsi

$$A^{n+1} = (a-b-1)^{n-1} A^2 = (a-b-1)^{n-1} (a-b-1) A = (a-b-1)^n A$$
$$B^{n+1} = (a-b-1)^{n-1} B^2 = (a-b-1)^{n-1} (a-b-1) B = (a-b-1)^n B$$

   Ce qui prouve l'assertion au rang $n+1$ et achève la récurrence.

2. On a
$$AB = \begin{pmatrix} -b & -b \\ a-1 & a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-1 & b \\ 1-a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
et
$$BA = \begin{pmatrix} a-1 & b \\ 1-a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b & -b \\ a-1 & a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
En particulier A et B commutent.
3. Trouver des constantes k_1 et k_2 telles que $(a-b-1)M = k_1 A + k_2 B$ revient à trouver $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$(a-b-1)M = k_1(-M + (a-b)I_2) + k_2(M - I_2)$$
C'est-à-dire
$$(a-b-1)M = (k_2 - k_1)M + ((a-b)k_1 - k_2)I_2$$
Il suffit alors de chercher (k_1, k_2) solution du système
$$\begin{cases} k_2 - k_1 = a - b - 1 \\ (a-b)k_1 - k_2 = 0 \end{cases}$$
Ce système a pour solution $k_1 = 1$, $k_2 = a - b$ et on a alors
$$(a-b-1)M = A + (a-b)B$$
4. On peut procéder par récurrence pour cette question mais on va employer ici une autre méthode (qui a l'avantage de ne présupposer connu le résultat final).

Comme A et B commutent on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer $(A + (a-b)B)^n$, on a alors
$$\begin{aligned}
(A + (a-b)B)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k (a-b)^{n-k} B^{n-k} \\
&= (a-b)^n B^n + A^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} A^k (a-b)^{n-k} B^{n-k} \\
&= (a-b-1)^{n-1} \left((a-b)^n B + A\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (a-b-1)^{k-1} A (a-b)^{n-k} (a-b-1)^{n-k-1} B \\
&= (a-b-1)^{n-1} \left((a-b)^n B + A\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (a-b-1)^{n-2} AB \\
&= (a-b-1)^{n-1} \left((a-b)^n B + A\right)
\end{aligned}$$
Ainsi
$$((a-b-1)M)^n = (a-b-1)^{n-1} \left((a-b)^n B + A\right)$$
D'où
$$(a-b-1)M^n = (a-b)^n B + A$$

Partie II

Probabilités

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, notons M_n l'événement « Mr M. mange du caramel le n-ième jour ». D'après la formule des probabilités totales on a
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_{n+1}) &= \mathbb{P}(M_{n+1}|M_n)\mathbb{P}(M_n) + \mathbb{P}(M_{n+1}|\overline{M}_n)\mathbb{P}(\overline{M}_n) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(M_n) + \frac{4}{5}p(\overline{M}_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{M}_{n+1}) &= \mathbb{P}(\overline{M}_{n+1}|M_n)\mathbb{P}(M_n) + \mathbb{P}(\overline{M}_{n+1}|\overline{M}_n)\mathbb{P}(\overline{M}_n)\\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(M_n) + \frac{1}{5}p(\overline{M}_n)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{4}{5}v_n \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{5}v_n \end{cases}$$

2. D'après la question précédente on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

Notons $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. Remarquons que l'on retrouve la matrice M de la première partie avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{4}{5}$.

3. On va montrer par récurrence que, pour $n \in \mathbb{N}$ $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

Initialisation :

Pour $n = 0$ on a bien $M^0 \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

Alors

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} &= M \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}\\ &= MM^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}\\ &= M^{n+1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

D'après la première partie on a

$$\begin{aligned}(a-b-1)M^n &= -M + (a-b)I_2 + (a-b)^n(M - I_2)\\ &= \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \left(-\frac{3}{10}\right)^n \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{2} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{10}\right)^n & -\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\left(-\frac{3}{10}\right)^n \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{10}\right)^n & -\frac{1}{2} - \frac{4}{5}\left(-\frac{3}{10}\right)^n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= -\frac{10}{13}\begin{pmatrix} -\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{10}\right)^n & -\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\left(-\frac{3}{10}\right)^n \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{10}\right)^n & -\frac{1}{2}-\frac{4}{5}\left(-\frac{3}{10}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{10}{13}\begin{pmatrix} -\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\left(-\frac{3}{10}\right)^n \\ -\frac{1}{2}-\frac{4}{5}\left(-\frac{3}{10}\right)^n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n = \frac{8}{13} - \frac{8}{13}\left(-\frac{3}{10}\right)^n = \frac{8}{13}\left(1-\left(-\frac{3}{10}\right)^n\right)$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{8}{13}$.

4. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}($Mr M. mange du caramel le n-ième jour $= \dfrac{8}{13}$ on peut considérer (le prouver rigoureusement demande des arguments mathématiques beaucoup plus poussés) que sur une durée longue (par exemple une année) Mr M. mange des caramels avec une fréquence moyenne de $\dfrac{8}{13}$, sur une année cela représente en moyenne 225 jours.

Corrigé de l'exercice 10

On a

$$\mathbb{P}(X \text{ est pair }) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$$

On reconnaît le développement en série entière de la fonction ch, ainsi $\mathbb{P}(X \text{ est pair }) = \mathrm{e}^{-\lambda}\operatorname{ch}(\lambda)$

De même on a

$$\mathbb{P}(X \text{ est impair }) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k+1) = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

On reconnaît le développement en série entière de la fonction sh, ainsi $\mathbb{P}(X \text{ est impair }) = \mathrm{e}^{-\lambda}\operatorname{sh}(\lambda)$

On sait que, pour $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) \geqslant \operatorname{sh}(x)$, on en déduit alors que $\mathbb{P}(X \text{ est pair }) \geqslant \mathbb{P}(X \text{ est impair })$.

Corrigé de l'exercice 11

Lors d'un lancer de deux dés, il y a $6^2 = 36$ issues possibles. Parmi celles-ci, 6 ont leurs deux dés identiques.

Donc à chaque lancer, la probabilité d'avoir deux dés identiques est $\dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

Les lancers étant indépendants, on répète donc l'expérience jusqu'à obtention d'un premier succès, et X désigne le nombre d'essais nécessaires.

Ici le succès est « obtenir deux dés identiques ».

On reconnaît donc une loi géométrique : $X \sim \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{6}\right)$.

Et donc $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\frac{1}{6}} = 6$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1-\frac{1}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 30$.

Corrigé de l'exercice 12

Pour $\ell \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > \ell) &= \sum_{i=\ell+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=\ell+1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} \\ &= p(1-p)^\ell \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^j = p(1-p)^\ell \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^\ell.\end{aligned}$$

Par définition de la probabilité conditionnelle, on a

$$\mathbb{P}(X > n+k | X > n) = \frac{\mathbb{P}([X > n] \cap [X > n+k])}{\mathbb{P}(X > n)}$$

Mais puisque $[X > n+k] \subset [X > n]$, on a $[X > n] \cap [X > n+k] = [X > n+k]$, et donc

$$\mathbb{P}(X > n+k | X > n) = \frac{\mathbb{P}(X > n+k)}{\mathbb{P}(X > n)} = \frac{(1-p)^{n+k}}{(1-p)^n} = (1-p)^k = \mathbb{P}(X > k)$$

Cette propriété s'interprète bien si on pense en termes de nombres d'essais avant un premier succès : elle traduit le fait que de savoir qu'on a déjà eu n échecs ne change pas la probabilité de n'avoir que des échecs lors des k répétitions suivantes.

Intuition

Ce résultat était prévisible : Une loi géométrique modélise le nombre d'essais avant l'obtention d'un premier succès lors de répétitions d'épreuves de Bernoulli.
Alors $[X > \ell]$ est réalisé si et seulement si les ℓ premiers essais ont été des échecs, ce qui se produit avec probabilité $(1-p)^\ell$.

Corrigé de l'exercice 13

1. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, notons S_k l'événement « le jeton est tiré dans le k-ième sac »et A l'événement « le jeton tiré est gagnant ». Les événements $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et A sont de probabilités non-nulles, ce qui justifie les probabilités conditionnelles utilisées par la suite.

   Alors $\{S_1, \dots, S_k\}$ est un système complet d'événements, de sorte que, par la formule des probabilités totales,

   $$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A|S_k)\mathbb{P}(S_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{k}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n(n+1)} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}$$

2. Nous cherchons donc $\mathbb{P}(S_k|A)$. Or nous connaissons $\mathbb{P}(A|S_k)$, ce qui doit nous faire penser à la formule de Bayes. On a

   $$\mathbb{P}(S_k|A) = \frac{\mathbb{P}(A|S_k)\mathbb{P}(S_k)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{k}{n+1}\frac{1}{n}}{\frac{1}{2}} = \frac{2k}{n(n+1)}.$$

Corrigé de l'exercice 14

1. On a $X \geqslant 1$, et donc $0 \leqslant \frac{1}{X} \leqslant 1$. Puisque la variable certaine égale à 1 admet une espérance, il en est de même de $\frac{1}{X}$.

Rédaction

Ne pas oublier de vérifier la positivité si l'on souhaite montrer l'existence d'une espérance par domination, le résultat n'étant pas valable pour des variables aléatoires négatives.

   Autre solution : d'après le théorème de transfert, $\frac{1}{X}$ admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\frac{1}{n}\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument, (mais puisqu'il s'agit ici d'une série à termes positifs, la convergence est équivalente à la convergence absolue). Or, $\frac{1}{n}\mathbb{P}(X = n) = \frac{p(1-p)^{n-1}}{n}$ de sorte que

   $$\forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant \frac{1}{n}\mathbb{P}(X = n) \leqslant p(1-p)^{n-1}.$$

Puisque la série de terme général $p(1-p)^{n-1}$ converge, il en est de même de la série de terme général $\frac{1}{n}\mathbb{P}(X=n)$. Et donc $\frac{1}{X}$ admet une espérance.

Mieux

En déduire que $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) \leqslant 1$.

D'après le théorème de transfert on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} p(1-p)^{k-1} \\
&= \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^k}{k} \\
&= \frac{-p}{1-p}\ln(1-(1-p)) \\
& \frac{p\ln(p)}{p-1}
\end{aligned}$$

2. Notons que $0 \leqslant \frac{1}{Z+1} \leqslant 1$, et donc $\frac{1}{Z+1}$ admet bien une espérance.
De plus, par le théorème de transfert, on a

Remarque

Le fait d'avoir déjà mentionné l'existence d'une espérance nous garantit que cette série converge absolument, il n'est donc pas nécessaire de le revérifier (le mentionner ne fait pas de mal cependant)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{Z+1}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1}\mathbb{P}(Z=k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{i}}{i!} \quad \text{Changement d'indice } i=k+1. \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{i}}{i!} - 1\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda}-1) \\
&= \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 15

Il est clair que X suit une loi géométrique de paramètre $q = 1-p$.
Mais alors la probabilité que X soit pair est

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=2n) = \sum_{n=1}^{+\infty} qp^{2n-1} = \frac{q}{p}\sum_{n=1}^{+\infty}(p^2)^n = \frac{q}{p}\left(\frac{1}{1-p^2}-1\right) = \frac{q}{p}\frac{p^2}{\underbrace{(1-p)}_{=q}(1+p)} = \frac{p}{1+p}.$$

Corrigé de l'exercice 16

1. Si le concierge essaie les clés sans remise, alors X prend ses valeurs dans $[\![1,10]\!]$. Pour $p \in [\![1,10]\!]$, soit M_p l'événement « la m-ème clé est mauvaise ».
Alors $[X=k] = M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_{k-1} \cap \overline{M_k}$.
Par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) =& \mathbb{P}(M_1)\mathbb{P}(M_2|M_1)\cdots\mathbb{P}(M_{k-1}|M_1\cap\cdots\cap M_{k-2})\mathbb{P}(\overline{M_k}|M_1\cap\cdots\cap M_{k-1})\\ =& \frac{9}{10}\frac{8}{9}\cdots\frac{10-(k-2)-1}{10-(k-2)}\frac{1}{10-(k-1)} = \frac{1}{10}.\end{aligned}$$

Ainsi, X suit une loi uniforme sur $[\![1,10]\!]$.

Méthode : On cherche à calculer la probabilité d'une intersection, il **faut** penser à la formule des probabilités composées.

Dans le cas où le concierge est ivre, X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{10}$, puisque X compte le nombre d'essais nécessaires à l'obtention d'un succès lors de répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{10}$.
Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{10}\frac{9^{k-1}}{10^{k-1}} = \frac{9^{k-1}}{10^k}$$

(a) Notons I l'événement « le concierge est ivre »et S l'événement « le concierge est sobre », de sorte que $\{I,S\}$ est un système complet d'événements. Les événements I et S sont de probabilités non-nulles. Nous savons que la loi de X conditionnellement à S est la loi uniforme $\mathcal{U}([\![1,10]\!])$ et que la loi de X conditionnellement à I est la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{1}{10}\right)$.
Ainsi, pour $N \geqslant 10$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=1}^{N} k\left(\mathbb{P}(X=k|I)\mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(X=k|S)\mathbb{P}(S)\right)\\ &= \mathbb{P}(I)\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X=k|I) + \mathbb{P}(S)\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X=k|S)\\ &= \mathbb{P}(I)\sum_{k=1}^{N} k\frac{9^{k-1}}{10^k} + \mathbb{P}(S)\sum_{k=1}^{10}\frac{k}{10}\end{aligned}$$

On reconnaît la somme partielle associée au calcul de l'espérance de la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{10}$, comme la loi géométrique de paramètre admet une espérance égale à 10, on a $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{N} k\frac{9^{k-1}}{10^k} = 10$. De plus on a $\sum_{k=1}^{10}\frac{k}{10} = \frac{11}{2}$ (espérance de la loi uniforme sur $[\![1,100]\!]$)
Ainsi

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X=k) == \frac{1}{3}\times 10 + \frac{2}{3}\frac{11}{2} = \frac{21}{3} = 7.$$

(b) Nous cherchons à calculer $\mathbb{P}(I|S=6)$. Par la formule de Bayes,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(I|X=6) =& \frac{\mathbb{P}(X=6|I)\mathbb{P}(I)}{\mathbb{P}(X=6|I)\mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(X=6|S)\mathbb{P}(S)}\\ =& \frac{\frac{9^5}{10^6}\frac{1}{3}}{\frac{9^5}{10^6}\frac{1}{3} + \frac{1}{10}\frac{2}{3}}\\ =& \frac{9^5}{9^5 + 2\times 10^5} \simeq 0.228\end{aligned}$$

Dans le cas où il a besoin de 11 essais, un calcul comme précédemment avec la formule de Bayes permettrait d'arriver à $\mathbb{P}(I|X=11) = 1$, en notant que $\mathbb{P}(X=11|S) = 0$. Mais bien entendu, le bon sens nous aurait permis de conclure sans calcul que le concierge est ivre.

Remarque : Le bon sens est un argument qui permet de conjecturer et de vérifier la cohérence mais pas de prouver

Corrigé de l'exercice 17

Notons B_i l'événement « la boule bleue est dans l'urne U_i. »
Notons R_1 (resp. R_2) l'événement « la première (resp. deuxième) boule tirée dans l'urne U_1 est rouge ».
La probabilité demandée est alors $\mathbb{P}(B_2|R_1 \cap R_2)$.
Par la formule de Bayes, on a, comme B_2 et $R_1 \cap R_2$ sont de probabilités non-nulles,

$$\mathbb{P}(B_2|R_1 \cap R_2) = \frac{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2|B_2)\mathbb{P}(B_2)}{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)}$$

Mais, sachant que la boule bleue est dans l'urne U_2, l'urne U_1 ne contient que des boules rouges, et donc $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2|B_2) = 1$.
D'autre part, on a $\mathbb{P}(B_2) = \frac{1}{n}$, puisque la boule bleue a autant de chances de se trouver dans chaque urne.
Reste donc à calculer $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)$.
Pour cela, appliquons la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$:

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(R_1 \cap R_2|B_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(R_1 \cap R_2|B_i) = \frac{1}{n}\left(\mathbb{P}(R_1 \cap R_2|B_1) + n - 1\right).$$

Si la boule bleue est dans une autre urne que U_1, alors $R_1 \cap R_2$ est nécessairement réalisé.

Mais on a alors

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2|B_1) = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap R_1 \cap R_2)}{\mathbb{P}(B_1)} = \frac{\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(R_1|B_1)\mathbb{P}(R_2|B_1 \cap R_1)}{\mathbb{P}(B_1)} = \mathbb{P}(R_1|B_1)\mathbb{P}(R_2|B_1 \cap R_1) = \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

Nous venons de prouver que

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2|B_1) = \mathbb{P}(R_1|B_1)\mathbb{P}(R_2|B_1 \cap R_1).$$

Il s'agit en fait de la formule des probabilités composées, mais appliquée à la probabilité $\mathbb{P}_{B_1}$ et non à la probabilité $\mathbb{P}$.

On en déduit donc que

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{n}\left(\mathbb{P}(R_1|B_1)\mathbb{P}(R_2|B_1 \cap R_1) + n - 1\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\frac{1}{2} + n - 1\right) = 1 - \frac{3n-2}{3n}.$$

Il vient alors

$$\mathbb{P}(B_2|R_1 \cap R_2) = \frac{1}{n}\frac{3n}{3n-2} = \frac{3}{3n-2}$$

Corrigé de l'exercice 18

1. Nous savons que $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$, et par la formule de Koenig-Huygens, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = 1 - \alpha^2$.
   Et donc $1 - \alpha^2 \geqslant 0$ i.e. $\alpha \in [-1, 1]$.
2. La variance de X^2 est donnée par $\mathbb{V}(X^2) = \mathbb{E}(X^4) - \mathbb{E}\left(X^2\right)^2 = 1 - 1 = 0$.

   Or, une variable de variance nulle est une variable presque sûrement constante, qui est alors égale à son espérance : $X^2 = 1$ presque sûrement.

   Ainsi, X ne prend que les valeurs 1 et -1.

   On a alors $\alpha = \mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) - (1 - \mathbb{P}(X = 1)) = 2\mathbb{P}(X = 1) - 1$.

   D'où $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1+\alpha}{2}$ et donc $\mathbb{P}(X = -1) = \frac{1-\alpha}{2}$.

Corrigé de l'exercice 19

1. x est bornée donc admet une espérance. On sait que, puisque X et à valeurs entières, on a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k-1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$$

Or, comme X est à valeurs dans $\{m, \cdots, n\}$, on a $\mathbb{P}(X > k) = 0$ si $k \geqslant m$ et $\mathbb{P}(X > k) = 1$ si $k \leqslant m-1$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(X > k) + \sum_{k=m}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) + \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} 1 + \sum_{k=m}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) + \sum_{k=n}^{+\infty} 0 \\
&= m + \sum_{k=m}^{n-1} \mathbb{P}(X > k)
\end{aligned}$$

2. On tire avec remise une boule dans une urne qui en contient n numérotées de 1 à n. On note X le rang du tirage où l'on obtient un numéro supérieur ou égal au précédent.
   (a) On peut déjà constater que $X(\Omega) \subset [\![2, +\infty[\![$

   L'événement $[X > k]$ correspond à la situation où l'on a tiré k boules, chacune étant strictement inférieure à la précédente, on a donc tiré k nombres entre 1 et n dans l'ordre décroissant strict.

   Tous les tirages étant équiprobables il nous suffit de compter le nombre de tirages réalisant l'événement $[X > k]$.

   Un tel tirage correspond d'abord au choix des k valeurs obtenues (qui sont toutes distinctes car strictement décroissantes), on a $\binom{n}{k}$ choix possibles. Une fois ces valeur choisies, l'ordre d'apparition est imposé car elles doivent être tirées dans l'ordre décroissant strict pour réaliser l'évènement $[X > k]$.

   Ainsi, il y a $\binom{n}{k}$ tirages réalisant $[X > k]$ parmi les n^k tirages possibles, d'où $\mathbb{P}(X > k) = \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$

   (b) À l'aide de la question précédente on voit que X est à valeurs dans $[\![2, n]\!]$ car $\mathbb{P}(X > n) = 0$.

   On peut donc appliquer la formule de la question 1. qui nous donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= 2 + \sum_{k=2}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) \\
&= 2 + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= 2 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} - \frac{\binom{n}{0}}{n^0} - \frac{\binom{n}{1}}{n^1} - \frac{\binom{n}{n}}{n^n} \\
&= 2 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 - \frac{n}{n} - \frac{1}{n^n} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{n^n}
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 20

1. Si $k = 1$ X est la variable aléatoire qui compte le nombre d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p pour avoir 1 succès, c'est donc une loi géométrique de paramètre p, $\mathscr{G}(p)$
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a alors $X(\Omega) \subset [\![k, +\infty[\![$.

   Pour $i \geqslant k$ on a $X = i$ si et seulement on a obtenu $k-1$ succès parmi les $i-1$ premiers tirages puis le k-ième succès exactement au dernier tirage.

   On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = i) &= \underbrace{\binom{i-1}{k-1}}_{\text{On place les } k-1 \text{ premiers succès}} \underbrace{p^{k-1}(1-p)^{i-k}}_{\text{probabilité d'avoir } k-1 \text{ succès et } (i-1)-(k-1) \text{ échecs}} \underbrace{p}_{\text{le } k\text{-ième succès}} \\ &= \binom{i-1}{k-1} p^k (1-p)i - k\end{aligned}$$

3. Pour $k = 2$ on a $X(\Omega) \subset [\![2, +\infty[\![$ et, pour $i \geqslant 2$,

$$\mathbb{P}(X = i) = \binom{i-1}{1} p^2 (1-p)i - 2 = (i-1)p^2(1-p)^{i-2}$$

   X admet une espérance si et seulement si $\sum i\mathbb{P}(X = i)$ converge.

   Or $\sum i\mathbb{P}(X = i) = p^2 \sum i(i-1)(1-p)^{i-2}$. De plus la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$ par

$$\forall x \in]-1, 1[, \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{+\infty} x^i$$

   D'où, par dérivation terme à terme

$$\forall x \in]-1, 1[, \qquad \frac{2}{(1-x)^2} = \sum_{i=2}^{+\infty} i(i-1)x^{i-2}$$

   Puisque $p \in]0, 1]$, on a $1 - p \in]-1, 1[$, ainsi $\sum i(i-1)(1-p)^{i-2}$ converge et

$$\mathbb{E}(X) = p^2 \sum_{i=2}^{+\infty} i(i-1)(1-p)^{i-2} = \frac{2p^2}{(1-(1-p)^3} = \frac{2}{p}$$

   On a $0 \leqslant \dfrac{1}{X} \leqslant \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{X}$ étant bornée elle admet une espérance.

   Si $p = 1$ alors $X = 2$ presque sûrement et donc $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Supposons $p \in]0,1[$, on a, d'après le théorème de transfert

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{i}\mathbb{P}(X=i) \\
&= \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{i}(i-1)p^2(1-p)^{i-2} \\
&= p^2\sum_{i=2}^{+\infty}(1-p)^{i-2} - p^2\sum_{i=2}^{+\infty}\frac{1}{i}(1-p)^{i-2} \\
&= p^2\sum_{i=0}^{+\infty}(1-p)^{i} - \frac{p^2}{(1-p)^2}\sum_{i=2}^{+\infty}\frac{1}{i}(1-p)^{i} \\
&= p^2\frac{1}{1-(1-p)} - \frac{p^2}{(1-p)^2}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i}(1-p)^{i} - (1-p)\right) \\
&= p - \frac{p^2}{(1-p)^2}\left(-\ln(1-(1-p)) - (1-p)\right) \\
&= p - \frac{p^3 - p^2 - p^2\ln(p)}{(1-p)^2} \\
&= \frac{p - p^2 + p^2\ln(p)}{(1-p)^2}
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 21

1. On ne continue de jouer que si on a fait un numéro strictement supérieur au précédent, ainsi on ne fera plus de 7 lancers, $X(\Omega) \subset [\![2,7]\!]$.

   De plus, pour $k \in [\![1,6]\!]$, la succession de tirages $1 \to 2 \to \cdots \to k \to 1$ réalise l'événement $[X = k+1]$. Puisque cette succession est de probabilité non-nulle on ne déduit que l'événement $[X = k+1]$ est de probabilité non-nulle.

   Ainsi $X(\Omega) = [\![2,7]\!]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, L'événement $[X > n]$ correspond à la situation « On a joué au mois n fois et on continuera au mois une fois », i.e. à la situation : « les résultats des n premiers lancers étaient dans l'ordre croissant strict »

   Un tel tirage correspond d'abord au choix des n valeurs obtenues (qui sont toutes distinctes car strictement croissantes), on a $\binom{6}{n}$ choix possibles. Une fois ces valeur choisies, l'ordre d'apparition est imposé car elles doivent être tirées dans l'ordre décroissant strict pour réaliser l'évènement $[X > n]$.

   Ainsi, il y a $\binom{6}{n}$ tirages réalisant $[X > n]$ parmi les 6^n tirages possibles, d'où $\mathbb{P}(X > n) = \dfrac{\binom{6}{n}}{6^n}$ si $n \in \mathbb{N}$
3. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X > n-1) - \mathbb{P}(X > n) = \frac{\binom{6}{n-1}}{6^{n-1}} - \frac{\binom{6}{n}}{6^n} = \frac{6\binom{6}{n-1} - \binom{6}{n}}{6^n}$$

   Puisque $X(\Omega) = [\![2,7]\!]$ on a alors

n	2	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}(X = n)$	$\frac{7}{12}$	$\frac{35}{108}$	$\frac{35}{432}$	$\frac{7}{648}$	$\frac{35}{46656}$	$\frac{1}{46656}$

Calcul

Bien évidemment le jour de l'oral on s'arrêtait à l'expression précédente, personne ne vous demandera de calculer explicitement ces probabilités

4. X étant bornée elle admet des moments à tout ordre, on sait qu'alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)\\ &= \sum_{n=0}^{6} \frac{\binom{6}{n}}{6^n}\\ &= \left(1+\frac{1}{6}\right)^6\\ &= \frac{7^6}{6^6}\\ &\simeq 2.5\end{aligned}$$

Pour $\mathbb{E}(X^2)$ on va exploiter le résultat de l'exercice 8

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)\mathbb{P}(X > n)\\ &= \sum_{n=0}^{6} (2n+1)\frac{\binom{6}{n}}{6^n}\\ &= 2\sum_{n=0}^{6} n\frac{\binom{6}{n}}{6^n} + \sum_{n=0}^{6} \frac{\binom{6}{n}}{6^n}\end{aligned}$$

Or, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $(1+x)^6 = \displaystyle\sum_{n=0}^{6} \binom{6}{n} x^n$, d'où, par dérivation

$$\sum_{n=0}^{6} n\binom{6}{n} x^n = x \times \sum_{n=0}^{6} n\binom{6}{n} x^{n-1} = 6x(1+x)^5$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= 2\sum_{n=0}^{6} n\frac{\binom{6}{n}}{6^n} + \sum_{n=0}^{6} \frac{\binom{6}{n}}{6^n}\\ & 12 \times \frac{1}{6} \times \left(1+\frac{1}{6}\right)^5 + \frac{7^6}{6^6}\\ &= \frac{19 \times 7^5}{6^6}\\ &\simeq 6.8\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 22

1. on a $X_n(\Omega) \subset [\![0,3]\!]$.

   On peut remarquer que, presque sûrement, $X_0 = 3$, $X_1 = 2$ et $X_2 \geqslant 1$. Les calculs des questions suivantes nous permettrons de vérifier que, pour tout $n \geqslant 2$, on a bien $X_n(\Omega) = [\![0,3]\!]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$,
   - Si $X_n = 0$ alors l'urne U_0 contient trois boules 1 et l'urne U_1 trois boules 0. L'échange suivant amènera nécessairement une boule 1 dans l'urne U_1, ainsi

     $$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0|X_n = 0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 2|X_n = 0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 3|X_n = 0) = 0, \qquad \mathbb{P}(X_{n+1} = 1|X_n = 0) = 1$$
   - Si $X_n = 1$ alors l'urne U_0 contient deux boules 1 et une boule 0 et l'urne U_1 une boule 1 et deux boules 0. Alors

     $$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0|X_n = 1) = \mathbb{P}(\text{On échange la boule 1 de } U_1 \text{ et la boule 0 de } U_0) = \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1}=1|X_n=1) &= \mathbb{P}(\text{On échange la boule 1 de } U_1 \text{ et une boule 1 de } U_0)\\ &\quad + \mathbb{P}(\text{On échange une boule 0 de } U_1 \text{ et la boule 0 de } U_0)\\ &= \frac{1}{3}\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\frac{1}{3}=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=2|X_n=1) = \mathbb{P}(\text{On échange une boule 0 de } U_1 \text{ et une boule 1 de } U_0) = \frac{2}{3}\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=3|X_n=1)=0$$

— Si $X_n=1$ alors l'urne U_0 contient une boule 1 et deux boule 0 et l'urne U_1 deux boules 1 et une boules 0. Alors

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=0|X_n=2)=0$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1|X_n=2) = \mathbb{P}(\text{On échange une boule 1 de } U_1 \text{ et une boule 0 de } U_0) = \frac{4}{9}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1}=2|X_n=2) &= \mathbb{P}(\text{On échange une boule 1 de } U_1 \text{ et la boule 1 de } U_0)\\ &\quad + \mathbb{P}(\text{On échange la boule 0 de } U_1 \text{ et une boule 0 de } U_0)\\ &= \frac{4}{9}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=3|X_n=2) = \mathbb{P}(\text{On échange la boule 0 de } U_1 \text{ et la boule 1 de } U_0) = \frac{1}{3}\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

— Si $X_n=3$ alors l'urne U_0 contient trois boules 0 et l'urne U_1 trois boules 1. L'échange suivant amènera nécessairement une boule 0 dans l'urne U_1, ainsi

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=0|X_n=3)=\mathbb{P}(X_{n+1}=2|X_n=3)=\mathbb{P}(X_{n+1}=3|X_n=3)=0, \qquad \mathbb{P}(X_{n+1}=2|X_n=0)=3$$

D'après la formule des probabilités totales appliquées au système complet d'événements $([X_n=k])_{k\in[\![0,3]\!]}$ on a alors

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=0)=\sum_{k=0}^{3}\mathbb{P}(X_{n+1}=0|X_n=k)\mathbb{P}(X_n=k)=\frac{1}{9}\mathbb{P}(X_n=1)$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1)=\sum_{k=0}^{3}\mathbb{P}(X_{n+1}=1|X_n=k)\mathbb{P}(X_n=k)=\mathbb{P}(X_n=0)+\frac{4}{9}\mathbb{P}(X_n=1)+\frac{4}{9}\mathbb{P}(X_n=2)$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=2)=\sum_{k=0}^{3}\mathbb{P}(X_{n+1}=2|X_n=k)\mathbb{P}(X_n=k)=\frac{4}{9}\mathbb{P}(X_n=1)+\frac{4}{9}\mathbb{P}(X_n=2)+\mathbb{P}(X_n=3)$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=3)=\sum_{k=0}^{3}\mathbb{P}(X_{n+1}=3|X_n=k)\mathbb{P}(X_n=k)=\frac{1}{9}\mathbb{P}(X_n=2)$$

3. On a

$$LA=\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}L+J$$

4. Il s'agit simplement d'une réécriture matricielle du résultat de la question 2.

But

Une telle question a pour but de vous permettre de vérifier vos résultats de la question 2. ou bien, si vous n'avez pas su faire la question 2., de vous en donner le résultat afin de vous permettre de continuer l'exercice.

5. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X_{n+1}\right) &= \sum_{k=0}^{3}k\mathbb{P}(X_n=k)\\ &= LU_{n+1}\\ &= LAu_n\\ &= \left(\frac{1}{3}L+J\right)U_n\\ &= \frac{1}{3}LU_n+JU_n\\ &\frac{1}{3}\mathbb{E}(X_n)+\sum_{k=0}^{3}\mathbb{P}(X_n=k)\\ &= \frac{1}{3}\mathbb{E}(X_n)+1\end{aligned}$$

6. La suite $\left(\mathbb{E}\left(X_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

   Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $r = \frac{1}{3}r+1$, i.e. $r = \frac{3}{2}$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}(X_{n+1})-r = \frac{1}{3}\left(\mathbb{E}(X_n) - r\right)$.

   D'où, puisque $\mathbb{E}(X_0) = 3$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{E}(X_n) = r + \frac{1}{3^n}\left(\mathbb{E}(X_0) - r\right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\frac{1}{3^n}$$